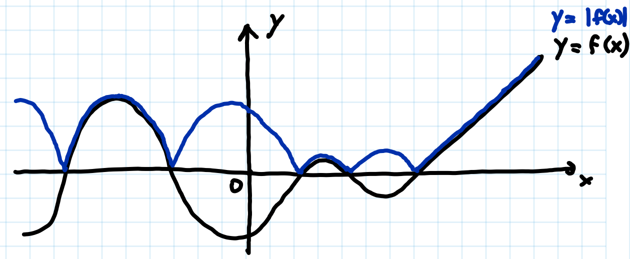
# TUTORATO ANALISI I - 10/11/23

## QUALCHE RICHIAMO SULLE SIMMETRIE nel caso di GRAFICI DI FUNZIONI

1) Consideriamo una funzione $y = f(x)$.

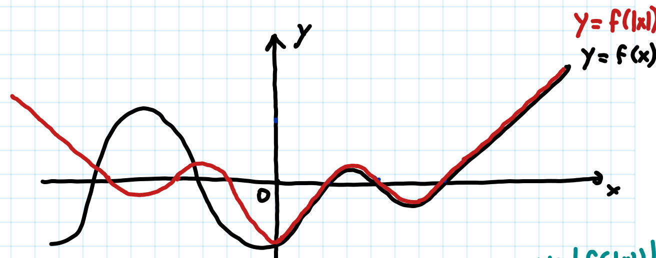
Allora il grafico di:

- $y = |f(x)|$ si ottiene simmetrizzando rispetto all'asse $x$ la parte di grafico $y = f(x)$ con $\underline{y < 0}$ (in BLU)

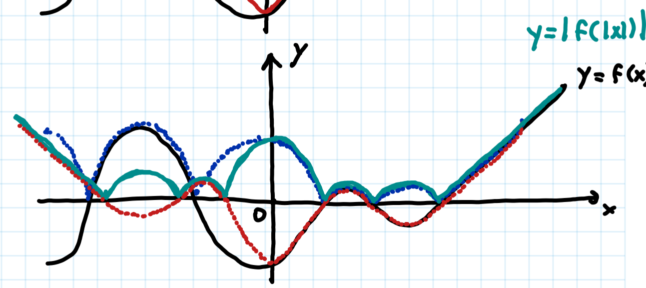



- $y = f(|x|)$ si ottiene simmetrizzando rispetto all'asse $y$ la parte di grafico $y = f(x)$ con $x < 0$ (in ROSSO)

È una funzione PARI!




- $y = |f(|x|)|$ si ottiene combinando le precedenti (in VERDE)



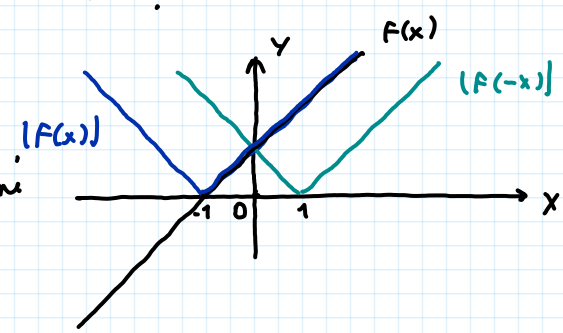

2) $y = |f(x)|$ in generale NON è una funzione PARI:

Es. $f(x) = x + 1$

$|f(x)| = |x+1|$ blu

$|f(-x)| = |-x+1|$ verde

sono funzioni diverse




3) $y = f(|x|)$ in generale NON è una funzione $\geq 0$:

Es. $f(x) = -x^2 - 1$

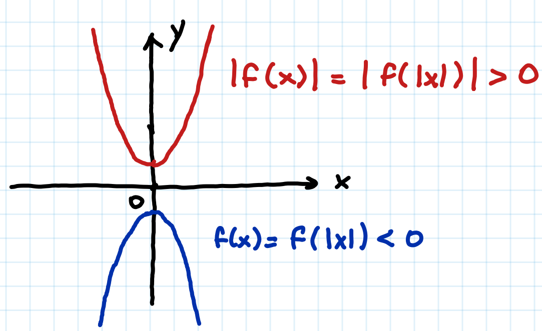
$\quad\;\; \shortparallel$

$f(|x|) = -x^2 - 1 < 0$

(in blu)

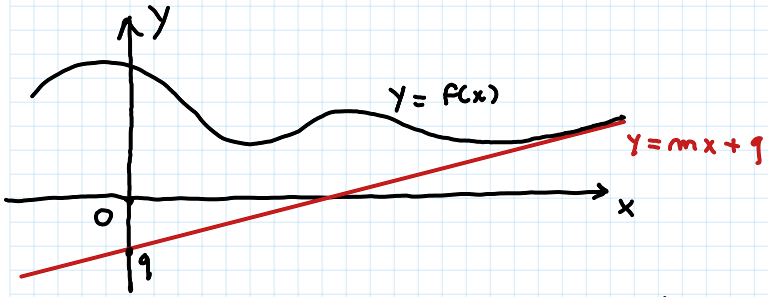
$y = |f(x)| = |f(|x|)|$ invece è sempre $\geq 0$:

(in rosso)



# CONSIDERAZIONI SUGLI ASINTOTI OBLIQUI

Data una funzione $y = f(x)$, la retta $y = mx + q$ è un asintoto destro/sinistro per $f(x)$ se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \big( f(x) - (mx+q) \big) = 0$




la funzione $f(x)$ si avvicina sempre più alla retta $y = mx + q$ quando $x \to +\infty$

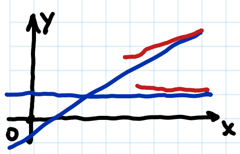
$m$:
- $= 0$ (cioè $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -q$) **ASINTOTO ORIZZONTALE**
- $\neq 0$ **ASINTOTO OBLIQUO**

Come riconoscerlo? Se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$ FINITO,

allora $f(x)$ ammette asintoto obliquo $y = mx + q$,

dove $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big( f(x) - mx \big)$.

**ATTENZIONE!** Se $f(x)$ ammette un asintoto orizzontale (dx/sx), non può ammettere un asintoto obliquo (nella stessa direzione).




[In effetti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{f(x)}^{\to a}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} = 0$ ]

Riconoscere "al volo" se ci sono asintoti obliqui: per $x \to \pm\infty$ guardo i termini « dominanti »:

- $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x^2 + 5x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x \cdot x^2} = 1$ ammette asintoto obliquo
- $f(x) = \dfrac{2x}{x^7 - 5}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^8} = 0$ NON ammette asintoto obliquo
- $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{14x \log x}$ NON ammette asintoto obliquo : $e^x$ infinito di ordine superiore a $x^\alpha \log x$ per ogni $\alpha > 0$

## STUDIO DI FUNZIONE : Riprendiamo l'esercizio dell'ultima volta [08/11]

$$f(x) = \left| \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) \right| .$$

$\longrightarrow x \neq \pm 3$

### 6) DERIVATA.

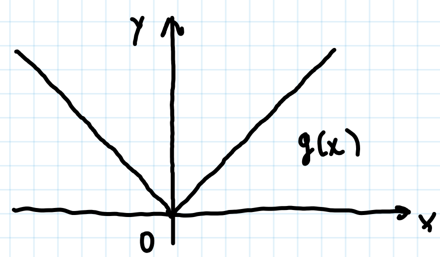
Guardo tutte le funzioni che « composte tra loro » costituiscono la nostra funzione $f(x)$:

- $\frac{x^2-4}{x^2-9}$ , per $x \neq \pm 3$ è continua e derivabile ✓
- $\arctan(x)$ è continua e derivabile (su tutto $\mathbb{R}$) ✓
- $|x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed è derivabile SOLO su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ✗

Analizziamo quindi il caso $|\dots| = 0$ , che è l'unico che potrebbe «dare problemi» con la derivabilità.

**Recap: NON DERIVABILITÀ in 0 di $y = |x|$.**

$g(x) = |x|$ non è derivabile nel punto $x_0 = 0$

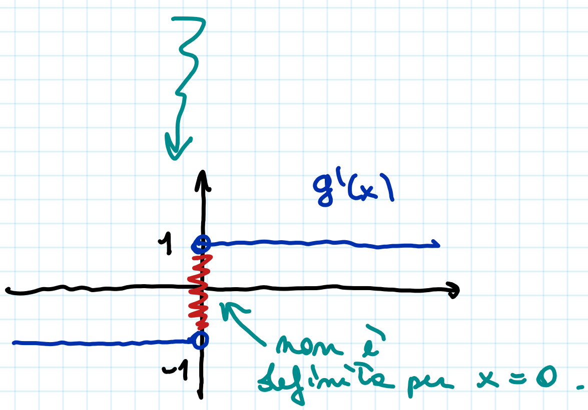



$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1 \qquad h > 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$




$f(x) = \left| \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) \right|$ : abbiamo problemi con la derivabilità quando $\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) = 0$ , cioè quando $x = \pm 2$.

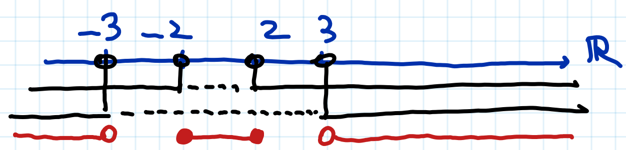
Se invece $x_0 \in D$, $x_0 \neq \pm 2$, allora $f(x)$ è derivabile in $x_0$

Se $x \neq \pm 2$, $f(x) > 0$, studiamo la derivata:

$$\left[ f(x) = |t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} \right]$$

$$f(x) = \left| \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) \right| = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right), & \text{se } \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) \geq 0 \\ -\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right), & \text{se } \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right) \geq 0 \iff \frac{x^2-4}{x^2-9} \geq 0$$




$$\iff x < -3 \ \vee \ -2 \leq x \leq 2 \ \vee \ x > 3$$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right), & x < -3 \ \vee \ -2 \leq x \leq 2 \ \vee \ x > 3 \\ -\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right), & -3 < x < -2 \ \vee \ 2 < x < 3 \end{cases}$$

vanno esclusi nel calcolo di $f'(x)$

$f'(x)$ può essere calcolata derivando le due funzioni SOLO per gli $x \in D$ t.c. $x \neq \pm 2$

$$\left(\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)^2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)^2}\left(\frac{x^2-9+5}{x^2-9}\right)' =$$

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} = \frac{x^2-9+9-4}{x^2-9} = \\ = 1+\frac{5}{x^2-9}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)^2}\left(1+\frac{5}{x^2-9}\right)' =$$

Questo tipo di semplificazione risulterà molto utile in futuro (ad esempio nel calcolo di integrali), conviene abituarsi!

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)^2}\left(5\left(\frac{1}{x^2-9}\right)'\right) =$$

**Recap**

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$= \frac{5}{1+\frac{(x^2-4)^2}{(x^2-9)^2}} \cdot \frac{-\overbrace{(x^2-9)'}^{2x}}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{-5(2x)}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2}$$

ho tolto l'=.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2}, & x<-3 \ \vee \ -2<x<2 \ \vee \ x>3 \\[2ex] \dfrac{10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2}, & -3<x<-2 \ \vee \ 2<x<3 \end{cases}$$

Studiamo la derivabilità nel caso $x_0 = \pm 2$.

Per simmetria ( parità di $\arctan \frac{x^2-4}{x^2-9}$ ) basta solo $x_0 = 2$.

Vogliamo vedere se esiste il limite del rapporto incrementale* per $x_0 = 2$

* (guardare la fine della pag. successiva)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

cambio di variabile

$x = x_0 + \underbrace{h}_{\to 0}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - \overbrace{f(2)}^{=0}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left|\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)\right|}{x-2}$$ per vedere se esiste, analizziamo dx e sx:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left|\arctan\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x^2-9}\right)\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \left| \frac{\arctan\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x^2-9}\right)}{x-2} \right| =$$

$x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{\arctan\left(\frac{h(h+4)}{(h+2)^2-9}\right)}{h} \right| =$$

Torno alla variabile $h$ (sembra più comodo per ricondursi a limiti notevoli)

$h = x-2 > 0$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left| \frac{\arctan\left(\frac{h(h+4)}{(h+2)^2-9}\right)}{h(h+4)/((h+2)^2-9)} \cdot \frac{h+4}{(h+2)^2-9} \right| =$$

voglio ricondurmi al limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1$

la funzione $|x|$ è continua $\Rightarrow$ il limite "passa dentro"

$$= \left| \lim_{h\to 0^+} \underbrace{\frac{\arctan\left(h(h+4)/(h+2)^2-9\right)}{h(h+4)/(h+2)^2-9}}_{\to 1} \cdot \frac{h+4}{(h+2)^2-9} \right| =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1$$

con $y = \frac{h(h+4)}{(h+2)^2-9} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

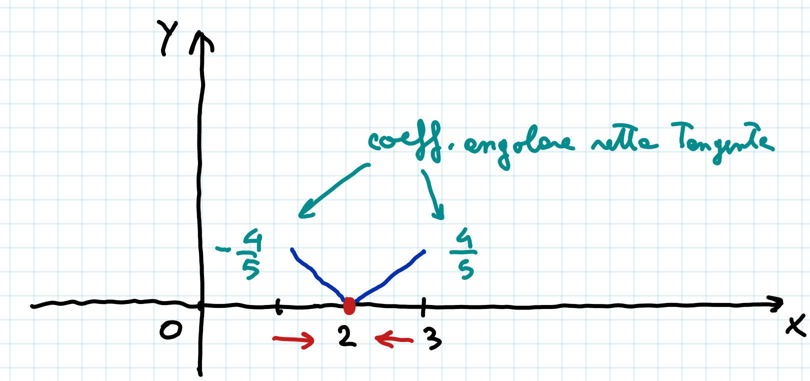
$$= \left| \lim_{h\to 0^+} \frac{h+4}{(h+2)^2-9} \right| = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\frac{4}{5}$$ , infatti:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\left|\arctan \frac{x^2-4}{x^2-9}\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\left|\arctan \frac{x^2-4}{x^2-9}\right|}{-|x-2|} =$$

$x-2<0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow x-2 = -|x-2|$

$$= - \underbrace{\lim_{x\to 2^-} \left| \frac{\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)}{x-2} \right|}_{\text{quello di prima}} = -\frac{4}{5}$$




La funzione $f(x)$ non è derivabile nel punto $x_0 = 2$.

$x_0 = 2$ è un PUNTO ANGOLOSO

* EXTRA | Potevamo verificarlo calcolando direttamente $\lim_{x\to 2^\pm} f'(x)$ con l'espressione trovata prima? In questo caso SÌ (ma in generale NO), lo vedremo la prossima volta.

Studiamo i punti di max e min di $f$.

- Abbiamo già visto che $f(\pm 2) = 0$ e $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D$, quindi $\pm 2$ sono punti di minimo di $f(x)$.

Se $x \in D$, $x \neq \pm 2$, è un punto di max/min di $f$, allora $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2}, & x < -3 \ \vee \ -2 < x < 2 \ \vee \ x > 3 \\[2ex] \dfrac{10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2}, & -3 < x < -2 \ \vee \ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\pm 10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2} = 0 \iff x = 0 \qquad \left( f(0) = \arctan \frac{4}{9} \right)$$

è un PUNTO CRITICO

Segno di $f'(x)$: $\quad (x^2-9)^2 + (x^2-4)^2 > 0$

somma di quantità non negative che non si annullano contemporaneamente

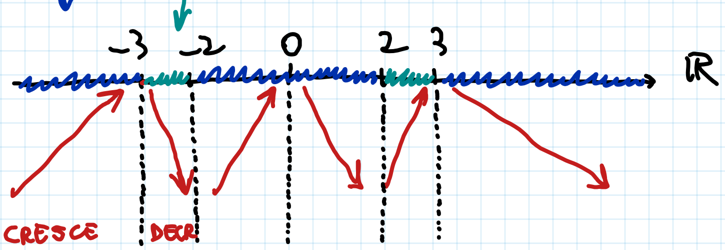
$f'(x) > 0$:
- Se $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, +\infty)$

  $f'(x) > 0 \iff \dfrac{-10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2} \iff x < 0$

  (f crescente)

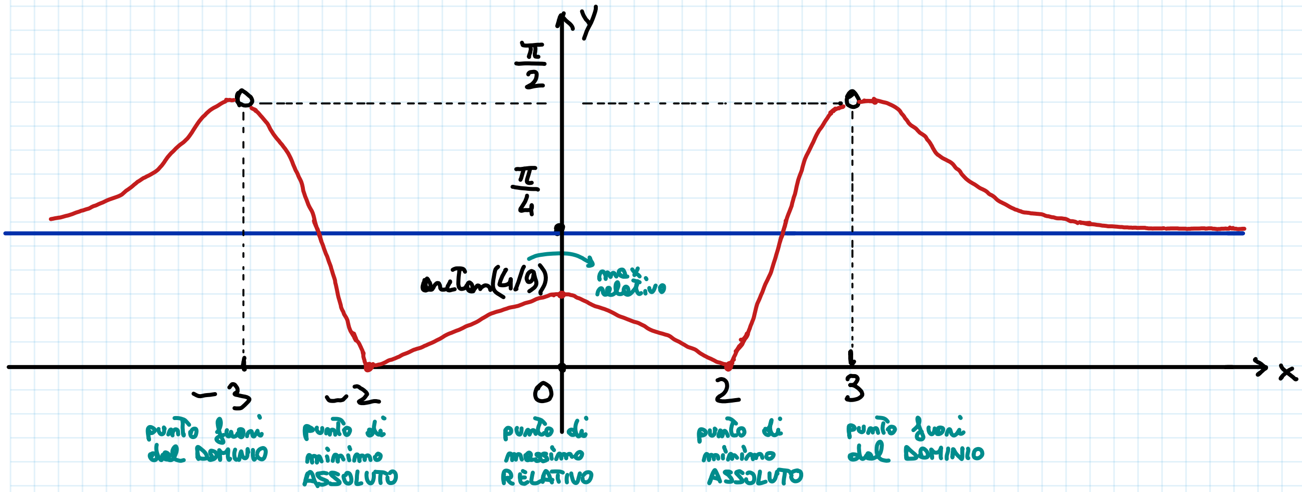
- Se $x \in (-3, -2) \cup (2, 3)$

  $f'(x) = \dfrac{10x}{(x^2-9)^2+(x^2-4)^2} > 0 \iff x > 0$




- $\pm 2$ punti di minimo (già lo sapevamo)
- $0$ punto di massimo (relativo)

Riportiamo graficamente quanto appena visto combinandolo con quanto già visto:




Resta solo da studiare la CONVESSITA': studio di $f''(x)$.